Planeación de aula.

Identificación

Grado: NOVENO	Area/Asignatura: MATEMÁTICAS	Fecha : 06-24/ febrero 2023
Docente / C.D.A.: Mauricio Contreras España		
Sede: PRINCIPAL	Periodo Académico: PRIMERO	
Eje temático : LOS NÚMEROS REALES: OPERACIONES Y PROPIEDADES		
Tiempo de Ejecución: 3 semanas		

Aprendizajes

1. Objetivos de aprendizajes

- Realizar operaciones utilizando los algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones cotidianas.
- Identificar el orden en los números reales y sus propiedades.

2. Referentes curriculares (EBC, DBA, Matriz de Referencia, Mallas de Aprendizaje)

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS
Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

DBA 2. Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

3. Evidencias de Aprendizajes / Desempeños Esperados

- Identifica y utiliza múltiples representaciones de números reales para realizar transformaciones y comparaciones entre expresiones algebraicas.
- Establece conjeturas al resolver una situación problema, apoyado en propiedades y relaciones entre números reales.

4. Recursos y materiales

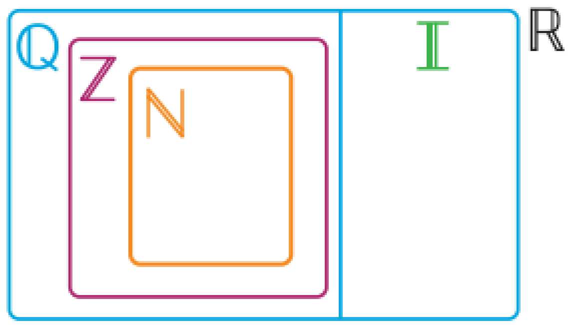
Para el profesor: tablero, marcadores de colores, regla.
Para el estudiante: bolígrafos, colores, lápiz, regla, calculadora.

Momentos de la clase

1. Inicio /exploración de saberes previos

-Saludo.
- Se da a conocer el o los objetivos de la clase.
-Se realizan preguntas introductorias de activación de conocimientos y contextualización del contenido, como:
¿Conoces el símbolo o letra con al que se representa cada conjunto de los números conocidos?
¿Todo número natural es racional, o todo número racional es natural?

Observe y analice el diagrama dado, que muestra la relación de contenencia entre los conjuntos numéricos.



2. Contenido / Estructuración

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

En ocasiones cuando se le pide a un alumno que se ubique en un determinado conjunto numérico se queda sin saber que hacer o confunde uno con otro debido a que le dan muy poca importancia a conocer y distinguir estos conjuntos tan importantes y cuando se trata de ubicarse en uno u otro para determinado proceso u operación se pegan la embalada más grande. Para que a usted no le suceda esto haré un resumen sencillo y muy práctico sobre los conjuntos numéricos:

NÚMEROS NATURALES

El más pequeño de los conjuntos numéricos es el de los números naturales que denotamos con la letra N y está formado por los números que habitualmente utilizamos para contar y van desde el cero hasta infinito es decir, el conjunto de los números naturales es:
N ={0,1,2,3,4,5,...}

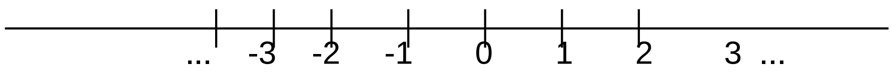
NOTA: Algunos autores no toman al cero como número natural.

NÚMEROS ENTEROS

En su orden el conjunto que sigue es el de los números enteros que denotamos con la letra Z y está formado por los naturales y sus opuestos (los negativos) recordemos que el cero es neutro, es decir, no es ni positivo ni negativo. Los enteros son entonces:

Z ={...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...} los tres puntos indican que a lado y lado hay infinitos números.

Su representación gráfica es la siguiente:



Los enteros mayores que cero se llaman enteros positivos y se denotan con Z^+ Los enteros menores que cero son los enteros negativos y se denotan por Z^- Como se dijo anteriormente el cero es neutro aunque para algunos casos se considera positivo.

$Z^+ = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$

$Z^- = \{-1,-2,-3,-4,-5,\ldots\}$

Si nos fijamos bien vemos que los enteros contienen a los naturales es decir, el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros $(N \subset Z)$.

NÚMEROS RACIONALES

Este conjunto contiene a todos los números que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y b es diferente de cero Ej: $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{10}{5}, etc$. Este conjunto se denota con la letra Q. Y es

$Q = \{\frac{a}{b} / a, b \in Z$ y b $\neq 0\}$ (definición por comprensión).

Observemos que todos los enteros se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$

por ejemplo $\frac{10}{5} = 2$; $4 = \frac{4}{1}, etc$. Por lo tanto el conjunto de los números enteros está incluido en el conjunto de los números racionales $(Z \subset Q)$.

Si tenemos un fraccionario $\frac{a}{b}$ y realizamos una división entre el numerador y el denominador obtenemos un entero o un decimal que puede ser finito o infinito periódico (los decimales se repiten por períodos) esto quiere decir que un número racional es un entero, un decimal finito o un decimal infinito periódico.

Ejemplo: $\frac{15}{4} = 3{,}75$ (decimal finito)

$\frac{7}{3} = 2{,}33\ldots$ (Decimal infinito periódico, el 3 se repite indefinidamente)

$\frac{20}{5} = 4$ (Entero)

Forma mixta de un racional. Hay ocasiones en que el numerador de una fracción es mayor que el denominador. En estas situaciones dividimos en numerador por el denominador, el cociente de esta división es la parte entera mientras que el residuo sigue dividido por el divisor (denominador) y esta es la parte fraccionaria para formar el número mixto. Por ejemplo expresar $\frac{7}{3}$ como número mixto.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Observemos que 7 dividido en 3 cabe dos veces y sobra 1, ese 1 sigue dividido en 3, por lo tanto la fracción $\frac{7}{3}$ se puede expresar así: $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$
Para expresar un mixto como fracción, basta con multiplicar el entero por el denominador de la fracción, sumarle el numerador y dejar el mismo denominador, por ejemplo $2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

Expresión fraccionaria de un número decimal
Para pasar un número decimal a fracción existen 3 posibles casos:

1. **Decimales finitos**, es decir, cuando las cifras decimales son finitas, por ejemplo 3,475 es un decimal finito pues tiene un numero finito de cifras decimales. El número 2,6666666… es un decimal infinito pues tiene infinitas cifras después de la coma.
   Para expresar los decimales finitos en forma de fracción, basta con escribir una fracción cuyo numerador sea el mismo número pero sin coma y el denominador sea la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número, por ejemplo:

$$4{,}79 = \frac{479}{100}$$

$$1{,}8 = \frac{18}{10}$$

$$5{,}125 = \frac{5125}{1000}$$

2. **Decimales periódicos**. Son aquellos en los cuales las cifras decimales se repiten infinitamente, por ejemplo. 5,22222222… el 2 se repite infinitamente, 1,254254254254… en numero 254 se repite de forma infinita. El numero anterior se puede escribir de la siguiente forma $1,\overline{254}$
   Para expresar esta clase de decimales a fracción se procede de la siguiente manera: Como se trata es de expresar un numero x de la forma $^{a}/_{b}$, lo que hacemos es armar una ecuación donde el número dado sea x, para luego determinar quienes son a y b.
   Si el número dado tiene dos decimales infinitos periódicos, multiplicamos la ecuación por 100 y restamos la segunda de la primera para determinar quiénes son

a y b después de despejar, así por ejemplo, expresar 3,25252525… como fracción. Se arman las ecuaciones de la siguiente manera.

$$x = 3,\overline{25} \qquad \text{(ecuac.1)}$$

Como son dos decimales multiplicamos esta ecuación por 100, así:

$$100x = 325,\overline{25} \quad \text{(ecuac.2)}$$

Al restar la ecuación 2 de la 1 nos queda.

$$100x - x = 325,\overline{25} - 3,\overline{25}$$

Entonces: $99x = 322$

Al despejar x nos queda $x = \frac{322}{99}$, que es la fracción que estábamos buscando.

Importante: si hay una cifra decimal que se repite, multiplicamos la ecuación por 10, si son 3 cifras que se repiten, multiplicamos la ecuación por 1000 y así sucesivamente.

3. **Decimales semiperiódicos**. Son aquellos en los que hay cifra decimales que aparecen una sola vez y las demás se repiten infinitamente, por ejemplo: 4,35222222222… aquí después del 35, el 2 se repite infinitamente, 3,627272727272… aquí del 6, el 27 se repite infinitamente.
   Para expresar estos decimales en forma de fracción, tomamos el número sin coma y sin línea periódica, menos la parte no periódica del número, dividido por tantos 9 como decimales periódicos halla y por tantos ceros como dígitos no periódicos halla después de la coma, por ejemplo:

$$1,4\overline{5} = \frac{145-14}{90} = \frac{131}{90}$$

$$9,6\overline{32} = \frac{9632-96}{990} = \frac{9536}{990}$$

$$15,01\overline{46} = \frac{150146-1501}{9900} = \frac{148645}{9900}$$

Importante: las fracciones se pueden simplificar si son reducibles

Otra forma de convertir decimales semi periódicos en fracciones es

PASOS PARA CONVERTIR UN DECIMAL INFINITO SEMI PERIÓDICO EN FRACCIONARIO

Ejemplo. $2,6252525 = 2,6\overline{25}$

1. Igualar el decimal a equis (x)

$$x = 2,6\overline{25}$$

2. Multiplicar la ecuación por una potencia de 10 que convierta el decimal en periódico puro.
   Como hay una cifra no periódica multiplicamos a lado y lado por 10. Así:

$$10x = 26,\overline{25}$$

3. Multiplicar por una potencia de 10 cuyos ceros sean el número de cifras del periodo.
   Como el periodo tiene 2 cifras, entonces multiplicamos la ecuación anterior por 100. Así:

$$1000x = 2625,\overline{25}$$

4. De la ecuación 3 restamos la ecuación 2 y nos queda así:

$$990x = 2599$$

5. Resolver la ecuación.

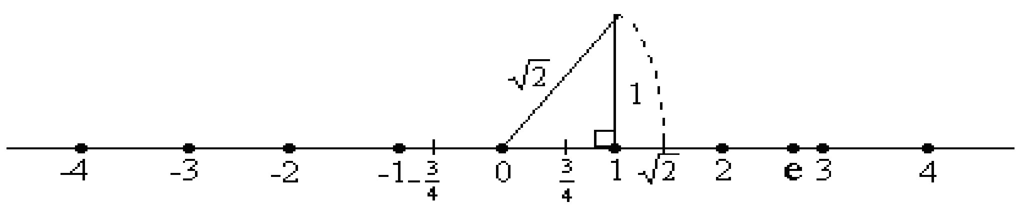
$$x = \frac{2599}{990}$$

<u>NÚMEROS IRRACIONALES</u>

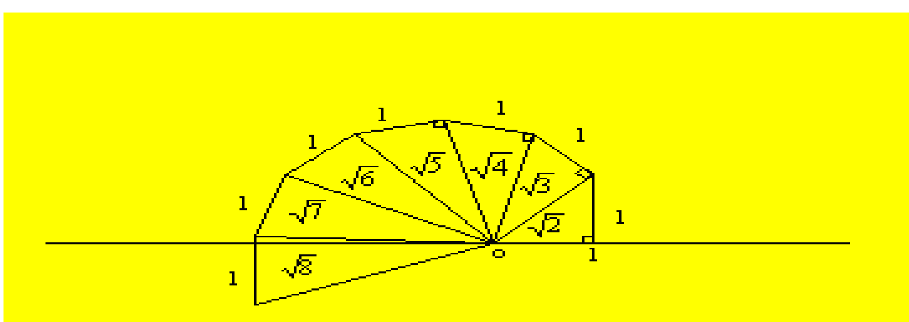
Hay otro conjunto formado por los decimales que no se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ estos decimales son infinitos no periódicos o sea que los decimales no se repiten por períodos, un ejemplo de estos números son las raíces cuadradas no exactas por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

Este conjunto es el de los números <u>IRRACIONALES</u> que denotamos por Q'. Nótese que los números racionales y los irracionales no tienen nada en común, es decir $Q \cap Q' = \phi$ (vacío). Porque aunque ambos tienen números decimales son decimales muy diferentes. Otros ejemplos de números irracionales son $\pi = 3{,}14159\ldots$ $e = 2{,}718\ldots$

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS IRRACIONALES



Para los enteros positivos que no son cuadrados perfectos, se puede demostrar que su raiz cuadrada es un número irracional, cuya localización en la recta numérica se logra de una manera sencilla empleando el teorema de Pitágoras (Ver fig. siguiente).



<u>NÚMEROS REALES</u>

Este conjunto contiene los números racionales más los irracionales y automáticamente contiene a los enteros y a los naturales o sea que es la reunión de todos los anteriores, se denota con la letra R. Conjuntos como el de los reales se llaman conjuntos densos ya que entre un elemento y otro no hay espacio. Imaginémonos que pudiéramos mirar en la recta numérica entre dos enteros, por lógica entre ellos hay un espacio pero entre dos números reales hay infinitos números o sea que no hay ningún espacio entre ellos, es por eso que se llama un conjunto denso.

Podemos hacer el siguiente esquema:

$R = QUQ^{I}$

Así como existen los números reales, existen otros que no son reales, son los llamados imaginarios.

OPERACIONES Y PROPIEDADES EN LOS REALES

En el conjunto de los números reales, las operaciones de la adición y la multiplicación cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad	Adición	Multiplicación
Clausurativa	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a + b \in \mathbb{R}$	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a \times b \in \mathbb{R}$
Conmutativa	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a + b = b + a$	Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a \times b = b \times a$
Asociativa	Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces, $a + (b + c) = (a + b) + c$	Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Modulativa	$a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. El módulo de la adición es 0.	$a \times 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$. El módulo de la multiplicación es 1.
Del inverso	$a + (-a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.	Para todo $a \neq 0$. $a \times \frac{1}{a} = 1$
Distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ para todo $a, b, c, \in \mathbb{R}$.	

EJEMPLOS:

1. Realizar las siguientes operaciones.

a. $2\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{7} - 8\sqrt{3}$

Primero, se aplica la propiedad asociativa:

$(2\sqrt{7} - 6\sqrt{7}) + (5\sqrt{3} - 8\sqrt{3})$

Luego, se utiliza la propiedad distributiva:

$\sqrt{7}\,(2 - 6) + \sqrt{3}\,(5 - 8)$

Después, se aplica la propiedad clausurativa:

$\sqrt{7}\,(-4) + \sqrt{3}\,(-3)$

Por último, se aplica la propiedad conmutativa:

$-4\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$

Por tanto, $2\sqrt{7} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{7} - 8\sqrt{3}$ es igual a $-4\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$.

b. $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} - 2)$

Primero, se aplica la propiedad distributiva:

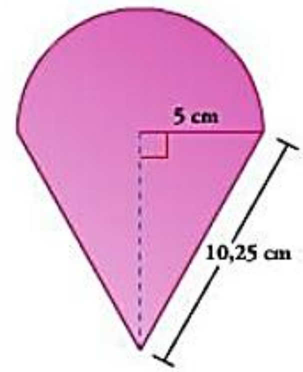
$\sqrt{3}\,(\sqrt{12} - 2) = \sqrt{3 \cdot 12} - 2\sqrt{3} = \sqrt{36} - 2\sqrt{3}$

Después, se extrae la raíz cuadrada de 36:

$6 - 2\sqrt{3}$

Por tanto, $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} - 2) = 6 - 2\sqrt{3}$

2. Hallar el perímetro de la figura.



Como la figura está delimitada por una semicircunferencia de radio $r = 5$ cm y dos lados de 10,25 cm de longitud cada uno, entonces el perímetro de la figura está dado por: $P = \pi \cdot r + l + l$

Al remplazar r por 5 y l por 10,25, se tiene:

$P = \pi \cdot (5) + 10{,}25 + 10{,}25$

Luego, al aplicar las propiedades de las operaciones, se obtiene:

$P = 5\pi + 20{,}5$

Por tanto, el perímetro de la figura es $(5\pi + 20{,}5)$ cm.

ORDEN EN EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Al comparar dos números reales se cumple una y solo una de las siguientes posibilidades.

$a < b$, a es menor que b; $a > b$, a es mayor que b o $a = b$, a es igual que b.

Desigualdades: una desigualdad es una expresión de la forma $x > a$ o $x \geq a$ o $x < a$ o $x \leq a$, en la que x es una variable y a es un número real. Por ejemplo, $x < -3$ y $x \geq \sqrt{5}$ son desigualdades.

Propiedades de las desigualdades

Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades, si a, b y $c \cdot \ \mathbb{R}$.

1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces, $a < c$.
2. Si $a < b$, entonces, $a + c < b + c$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces, $a \cdot c < b \cdot c$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $a \cdot c > b \cdot c$. Es decir, la desigualdad cambia de sentido cuando se multiplica por un número negativo.

A partir de los signos de las desigualdades es posible construir subconjuntos de los números reales y representarlos en la recta real. A estos subconjuntos se les denomina intervalos. Por ejemplo, la desigualdad $x < 3$, se representa en la recta numérica así:

EJEMPLOS:

1. Determinar la relación entre cada par de expresiones.

a. Si $c < d$, entonces comparar $-5 + c$ y $-5 + d$

Como $c < d$, entonces al aplicar la propiedad 2 de las desigualdades se tiene:

$-5 + c < -5 + d$

b. Si $c < d$, entonces comparar $-3c$ y $-3d$

Como $c < d$ y $-3 < 0$, entonces al aplicar la propiedad 4, se tiene:

$-3 \cdot c > -3 \cdot d$

Por tanto, $-3c > -3d$

c. Si $c < d$ y $d < 8$ entonces comparar c y 8.

Como $c < d$ y $d < 8$ al aplicar la primera propiedad de las desigualdades se tiene:

$c < 8$.

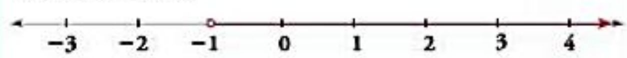
d. Si $0 < c < d$ entonces comparar $\frac{1}{c}$ y $\frac{1}{d}$.

Aplicando la propiedad 3 se tiene $\frac{0}{cd} < \frac{c}{cd} < \frac{d}{cd}$ es decir $0 < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$.

2. Representar el conjunto de números reales que cumplen cada desigualdad.

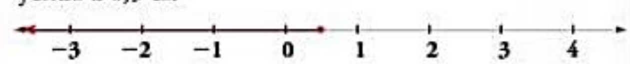
a. $x > -1$

El conjunto de números reales mayores que -1, sin incluir a -1 es:



b. $x \leq 0{,}5$

El conjunto de números reales menores que 0,5, incluyendo a 0,5 es:

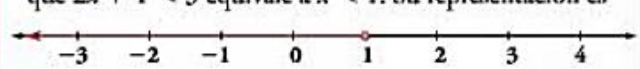


c. $-2 \leq x < \frac{3}{2}$

El conjunto de números reales mayores o iguales que -2 y menores que $\frac{3}{2}$ es

d. $2x + 1 < 3$

Utilizando las propiedades de las desigualdades, se muestra que $2x + 1 < 3$ equivale a $x < 1$. Su representación es



3. Práctica / Transferencia

Actividad 1

Exprese cada uno de los siguientes decimales como fracción.

$a.\quad 9{,}7$

$b.\ 1.05$

$c.\ 27{,}495$

$d.\ 8{,}333333\ldots$

$e.\ 13{,}666666\ldots$

$f.\ 42{,}321321321\ldots$

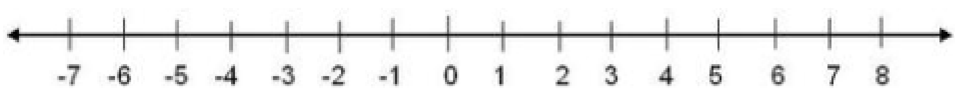
$g.\ 15{,}277777\ldots$

$h.\ 3{,}2436363636\ldots$

$i.\ 6{,}02555555\ldots$

ACTIVIDAD 2

1. Ubica en la recta real los siguientes números y clasifícalos en naturales, enteros, racionales e irracionales. 2, -5, $\frac{3}{4}$, $-\frac{13}{3}$, $\sqrt{8}$, $-\sqrt{10}$.



2. Indica en semirrectas los siguientes intervalos
   a. $[-7{,}5]$
   b. $(-\infty, 3)$

3. Resuelve los siguientes polinomios aritméticos.

$-5 \cdot \{-2-(-5-3)\}+(-13+7)=$

$\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{8}-\frac{9}{2}\right) \div \left(-\frac{7}{4}+\frac{2}{9}-\frac{3}{12}\right)=$

4. Escribe el numero en notación científica o viceversa según corresponda
   0,00026________________________________
   $6 \cdot 10^{12}$________________________________
   $8{,}55 \cdot 10^{-3}$________________________________
   58934000000 ___________________________

5. Realiza la siguiente suma (Recuerda simplificar)
$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} \ =$

6. Escriba un ejemplo numérico que muestre cada una de las propiedades. Represente gráficamente cada ejemplo.
7. Ordene de menor a mayor los siguientes números reales.

$\sqrt{2} \qquad \frac{7}{5} \qquad 1 \qquad -\sqrt{5} \qquad -2 \qquad 0 \qquad -\frac{3}{4}$

8. En la siguiente tabla se muestra la marca, el precio por litro y la cantidad de litros de helado vendidos por un distribuidor en cuatro tiendas distintas.

Marca	Precio / litro	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4
San Juan	$ 7.000	$\frac{19}{4}$ de litro	$\frac{15}{2}$ de litro	8 litros	$\frac{14}{3}$ de litro
El nevado	$ 6.500	7 litros	$\frac{21}{5}$ de litro	$\frac{19}{2}$ de litro	$\frac{17}{3}$ de litro
Don Luis	$ 4.800	$\frac{13}{2}$ de litro	$\frac{17}{4}$ de litro	$\frac{19}{3}$ de litro	9 litros
Deli	$ 3.900	9 litros	$\frac{29}{5}$ de litro	$\frac{18}{4}$ de litro	$\frac{13}{2}$ de litro

a) ¿Cuál es la marca de helado que más ha vendido el distribuidor en las cuatro tiendas? ______________

b) ¿Cuál tienda fue la que más dinero tuvo que darle al distribuidor?______________

ACTIVIDAD 4

1. Simplifique la expresión dada aplicando las propiedades de los números reales.

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{9}\right)$$

2. Si $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$ y $z = \frac{2}{3}$, hall eel valor numérico de las expresiones algebraicas dadas.
a) $3x + y - 2z$
b) $x + 12z - y$

4. Descripción de la Evaluación y Valoración/cierre

El proceso de evaluación va ser formativo y la evaluación cualitativa-cuantitativa, siguiendo los referentes de calidad (DBA y evidencias de aprendizajes). Sin embargo, debe haber una explicación de la actividad evaluativa, y de los criterios que se tendrán en cuenta para evidenciar el logro del resultado del aprendizaje.
Se tendrá en cuenta la participación asertiva, respuestas a preguntas planteadas por el docente, actividades en clase, pruebas escritas semejantes a las actividades planteadas en los diferentes momentos de la clase.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Realiza operaciones utilizando los algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones cotidianas.
- Realiza cálculos numéricos naturales utilizando las propiedades de las operaciones en resolución de problemas.
- Muestra flexibilidad a la hora de elegir el procedimiento más adecuado en la resolución de cálculos numéricos, según la naturaleza del cálculo que se va a realizar.
- Utiliza la calculadora con criterio y autonomía en la realización de cálculos complejos.
- Expresa con claridad el proceso seguido en la realización de cálculos.