Planeación de aula.

Identificación

Grado: **ONCE**	**Area/Asignatura:** **MATEMÁTICAS**	**Fecha :** **02/10/2023 – 27/10/2023**
Docente / C.D.A.: **GLORIA MARÍA TORRES DÍAZ**		
Sede: **PRINCIPAL**	**Periodo Académico:** **CUARTO PERIODO**	
Eje temático: **LÍMITES**		
Tiempo de Ejecución: TRES SEMANAS		

Aprendizajes

1. Objetivos de aprendizajes

- Halla el valor del límite de una determinada función aplicando los conceptos algebraicos.
- Determina gráficamente si el límite existe o no.

2. Referentes curriculares (EBC, DBA, Matriz de Referencia, Mallas de Aprendizaje)

Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

DBA 7 (modificado). Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de los límites y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.

3. Evidencias de Aprendizajes / Desempeños Esperados

Nota: las evidencias no son las que se encuentran en el documento original, fueron creadas a partir de lo que se espera que logren los estudiantes.

- Define e interpreta gráficamente el límite de una función.
- Calcula el límite de una función por sustitución.
- Calcula el límite de una función utilizando las propiedades.

4. Recursos y materiales

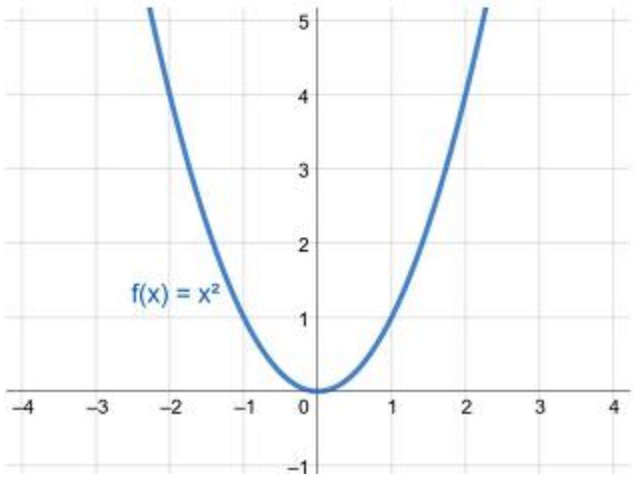
Tablero, marcadores de colores.

Momentos de la clase

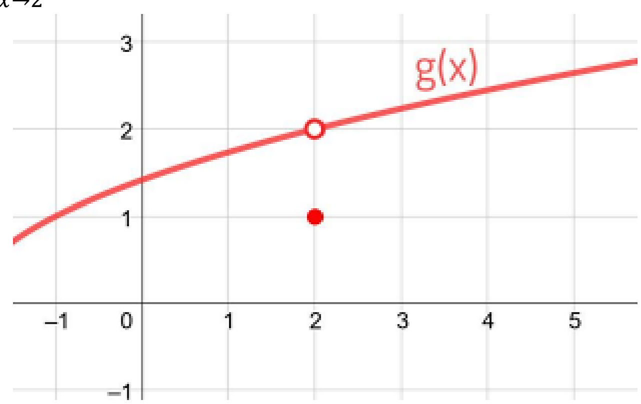
1. Inicio /exploración de saberes previos

Usa las siguientes gráficas para calcular los límites:

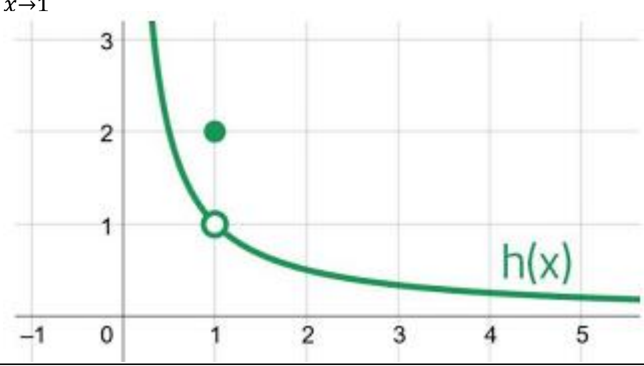
1. $\lim_{x \to 2} f(x)$



2. $\lim_{x \to 2} g(x)$



3. $\lim_{x \to 1} h(x)$



2. Contenido / Estructuración

IDEA INTUITIVA DE LÍMITE

Encontrar el límite de una función f significa hallar el valor al cual se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a tomar un valor determinado.

La función $f(x)$ tiende hacia el límite L cuando x tiende hacia a, si es possible hacer que $f(x)$ se aproxime tanto a L como se quiera, siempre y cuando x esté lo suficientemente cerca de a, sin tomar el valor de a. Esto se expresa como:

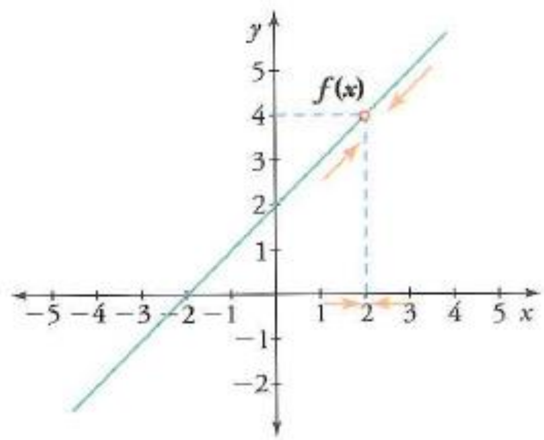
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Y se lee: el límite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ es igual a L.

Por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 se puede determinar calculando algunos valores de $f(x)$ para valores de x cercanos y menores que 2 y para valores cercanos y mayores que 2 como se muestra en las siguientes tablas.

x	1	1,7	1,9	1,999
$f(x)$	3	3,7	3,9	3,999

x	3	2,5	2,1	2,001
$f(x)$	5	4,5	4,1	4,001



Así cuando los valores de x se aproximan a 2, los valores de $f(x)$ se aproximan a 4, como se muestra en la gráfica. Por tanto, se tiene que:

$$\operatorname{Lím}_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

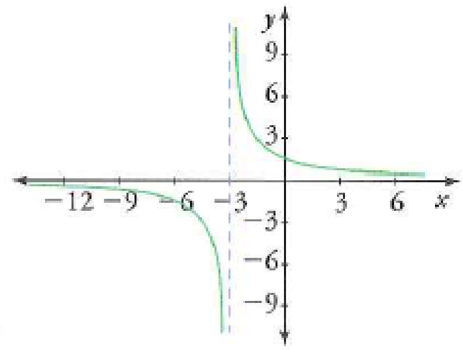
Ejemplos:

1. Utilizar tablas de valores para determinar si $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{4}{x+3}$ existe.

Se realizan las siguientes tablas de valores.

Con valores de x que se aproximan a -3, tales que $x < -3$.

x	-4	$-3{,}1$	$-3{,}001$	$-3{,}00001$
$f(x)$	-4	-40	-4.000	-400.000



Con valores de x que se aproximan a -3, tales que $x > -3$.

x	-2	$-2{,}9$	$-2{,}9999$	$-2{,}99999$
$f(x)$	4	40	40.000	400.000

En la primera tabla se puede observar que cuando x se aproxima a -3 y $x < -3$, los valores de $f(x)$ se pueden hacer más pequeños que cualquier cantidad negativa N. En cambio, en la segunda tabla se puede observar que cuando x se aproxima a -3 y $x > -3$, los valores de $f(x)$ se pueden hacer más grandes que cualquier cantidad positiva P.

Por tanto, en este caso $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ no existe.

2. Una esfera rueda sobre una rampa, tal como se muestra en la figura.

Se sabe que la velocidad promedio de la esfera está dada por la expresión:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{t^2 - 5^2}{t - 5}\ m/s$$

a. Determina la velocidad media de la esfera en los instantes $t = 4{,}9$ ***y*** $t = 5{,}1$

Se define la **velocidad instantánea** o simplemente velocidad como el **límite de la velocidad media** cuando el intervalo de tiempo considerado tiende a 0.

La velocidad media de un cuerpo viene dada por la expresión $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, donde Δs es el vector desplazamiento y Δt es el intervalo de tiempo. Su velocidad instantánea es $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_m = \lim\limits_{t \to 0} \frac{s}{t}$; es decir, cuando se analiza la velocidad media en un intervalo infinitamente pequeño.

Para la situación planteada en el Analiza, al reemplazar cada valor de t en la ecuación se tiene que las velocidades medias v_{m_1} y v_{m_2} para $t = 4{,}9$ y $t = 5{,}1$ son respectivamente:

$$v_{m_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(4{,}9)^2 - 5^2}{(4{,}9) - 5} = 9{,}9 \text{ m/s} \ \text{ y } \ v_{m_2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(5{,}1)^2 - 5^2}{(5{,}1) - 5} = 10{,}1 \text{ m/s.}$$

Para hallar la velocidad instantánea para $t = 5$, se debe calcular $\lim\limits_{\Delta t \to 5} v_m = \lim\limits_{t \to 5} \frac{t^2 - 5^5}{t - 5}$.

b. ¿Qué se puede concluir con respecto a la velocidad instantánea en $t = 5$?

Una tabla para valores muy próximos a $t = 5$ tanto por su izquierda como por su derecha, será útil para calcular esa velocidad instantánea.

(s)	4,5	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1	5,5
(m/s)	9,5	9,9	9,99	9,999	10,001	10,01	10,1	10,5

Tabla 3.2

Para valores muy próximos a $t = 5$, la velocidad se acerca cada vez más a 10 m/s.

Se escribe entonces: $\lim\limits_{t \to 5} \frac{t^2 - 5^5}{t - 5} = 10 \text{ m/s}$

Límites laterales

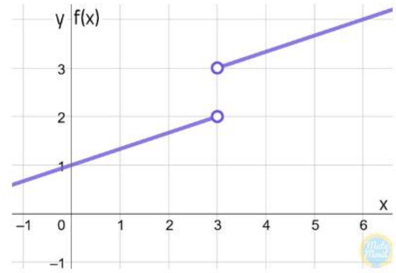
Se debe tener en cuenta, que:

$Si \ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x), entonces \ \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
$Si \ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x), entonces \ \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *no existe*

En resumen, si el límite por la izquierda es igual al límite por la derecha e igual a L, entonces el límite existe, y es igual a L. Si el límite por la izquierda, es diferente del límite por la derecha, entonces el límite no existe.

Ejemplo:

Calcular el valor del $\lim_{x\to 3} f(x)$ de acuerdo con la gráfica.



Tenemos entonces, que:

Límite por la izquierda	Límite por la derecha
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$	$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

Como el límite por la izquierda es diferente del límite por la derecha cuando x se acerca a 3, entonces el límite no existe:

$$\text{Dado que } \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x), \text{entonces } \lim_{x\to 3} f(x) \text{ no existe}$$

Leyes y propiedades de los límites

Los límites tienen una serie de leyes y propiedades que son muy útiles para resolver problemas. A continuación, se presentan dichas leyes y principales propiedades:

Nombre	Fórmula
Propiedad de sustitución	$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
Límite de una constante	$\lim_{x\to a} c = c$
Límite de x	$\lim_{x\to a} x = a$
Límite de una potencia	$\lim_{x\to a} x^n = a^n$ "n" es un entero positivo
Ley de la suma	$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
Ley de la resta o diferencia	$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
Ley del múltiplo constante	$\lim_{x\to a} c.f(x) = c.\lim_{x\to a} f(x)$
Ley del producto	$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$
Ley del cociente	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ Condición: $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
Ley de potencia	$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ "n" es un entero positivo
Ley de la raíz	$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ "n" es un entero positivo. Si "n" es par, suponemos $\lim_{x\to a} f(x) > 0$

Ejemplos:

1. ***Calcular los siguientes límites aplicando la propiedad de sustitución directa:***

a) $\lim_{x \to 2} 2x = 2(2) = 4$

b) $\lim_{x \to 3} x^2 = (3)^2 = 9$

c) $\lim_{x \to 3}(2x + 1) = 2(3) + 1$

2. ***Calcular los siguientes límites sabiendo que*** $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ ***y*** $\lim_{x \to 2} g(x) = 4$***:***

a) $\lim_{x \to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = 3 + 4 = 7$

b) $\lim_{x \to 2} 31. f(x) = 31. \lim_{x \to 2} f(x) = 31.3 = 93$

c) $\lim_{x \to 2}[f(x). g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x). \lim_{x \to 2} g(x) = 3 \,.\, 4 = 12$

d) $\lim_{x \to 2}[f(x)]^2 = \left[\lim_{x \to 2} f(x)\right]^2 = [3]^2 = 9$

e) $\lim_{x \to 2} \sqrt{5 + g(x)} = \sqrt{\lim_{x \to 2}[5 + g(x)]} = \sqrt{\lim_{x \to 2} 5 + \lim_{x \to 2} g(x)} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$

3. Práctica / Transferencia

Para la realización de la siguiente actividad, el docente organiza grupos de 4 estudiantes (esto, dependiendo de la cantidad de estudiantes que asistan el día en que se realiza la actividad)

ACTIVIDAD 1

1. Completa la tabla de valores para cada función. Luego, utiliza el resultado para estimar el límite:

a. $\lim\limits_{x \to 4} x - 3$

x	3,9	3,99	3,999	4	4,001	4,01	4,1
$f(x)$							

Tabla 3.5

b. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{9}}{x - 9}$

x	8,9	8,99	8,999	9	9,001	9,01	9,1
$f(x)$							

Tabla 3.6

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x^2 - 4}$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$							

Tabla 3.7

2. Elabora una tabla de valores para cada función y utiliza el resultado para estimar el límite.

a. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x+1}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

3. Observa cada gráfica. Encuentra, si existe, el límite que se pide. Sino existe, explica la razón.

a. $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 3$

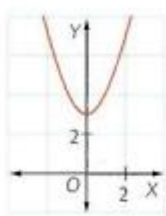


Figura 3.11

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

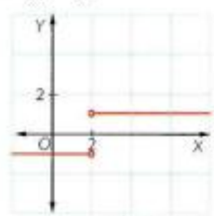
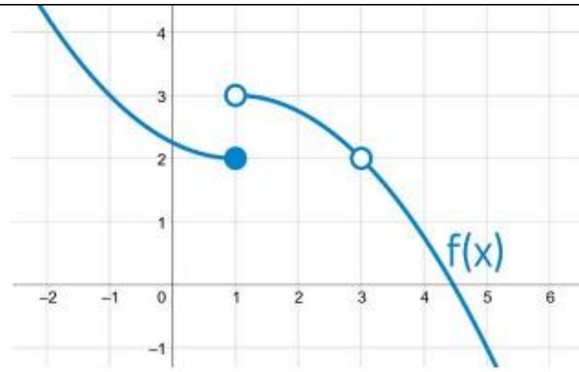


Figura 3.12

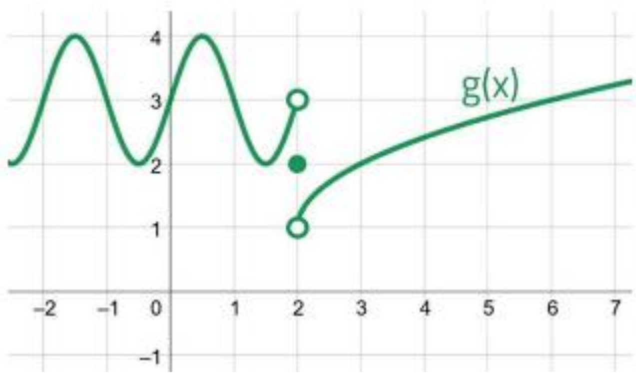
ACTIVIDAD 2

1. Usa la gráfica de la función f para calcular los siguientes límites. Sino existen, explica el porqué.



a. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$
b. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
c. $\lim_{x \to 1} f(x)$
d. $\lim_{x \to 3} f(x)$
e. $f(1)$

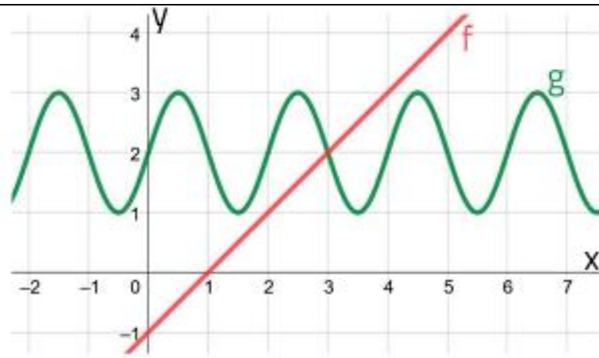
2. Usa la gráfica de la función g para calcular los límites indicados. Sino existen, explica el porqué.



a. $\lim_{x \to 2^-} g(x)$
b. $\lim_{x \to 2^+} g(x)$
c. $\lim_{x \to 2} g(x)$
d. $\lim_{x \to 6} g(x)$
e. $f(2)$

3. Calcular los siguientes límites:
a. $\lim_{x \to 5} 4x^2$
b. $\lim_{x \to 2}(x^3 - 1)$
c. $\lim_{x \to 4}(2x^2 + 3)$
d. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^4-80}$
e. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+8x+16}{x+4}$

4. Calcular los siguientes límites a partir de la gráfica:



a. $\lim_{x \to 3} [2\, f(x) + 3\, g(x)]$

b. $\lim_{x \to 4} [4\, f(x) - 5\, g(x)]$

4. Descripción de la Evaluación y Valoración/cierre

Para la evaluación se tendrá en cuenta:

Criterio	Porcentaje sobre nota
Participación en clase	10%
Presentación de la actividad	50%
Sustentación	40%

La nota máxima será de 10 puntos.