



## INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA ACUÍCOLA NUESTRA SEÑORA DE MONTECLARO

### GUÍA CINEMÁTICA: MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

**Docente: Carlos Álvarez**

#### COMPETENCIA:

Comprende, que el movimiento vertical o de caída libre, se presentan cuando un cuerpo se mueve solo sobre el efecto de la gravedad terrestre (en caída o hacia arriba)

#### DBA:

Comprende, que el reposo o el movimiento rectilíneo uniforme, se presentan cuando las fuerzas aplicadas sobre el sistema se anulan entre ellas, y que en presencia de fuerzas resultantes no nulas se producen cambios de velocidad.

#### EVIDENCIA DE APRENDIZAJE:

Comprende y aplica el concepto de aceleración terrestre en aplicaciones cotidianas

## MOVIMIENTO DE PROYECTILES O MOVIMIENTO PARABÓLICO

Supongamos que se lanza un objeto, con velocidad  $V_0$ , que forma con la horizontal un ángulo  $\alpha_0$

La velocidad inicial tiene dos componentes:

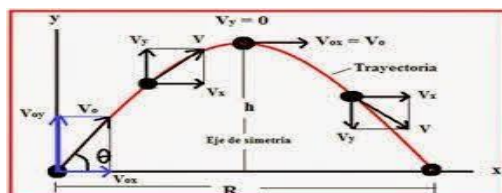
$V_{0x}$  y  $V_{0y}$ , las cuales se determinan por:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha_0$$

composición de dos movimientos: uno vertical, con velocidad  $V_{0y}$ , que corresponde al de un objeto lanzado hacia arriba y que regresa a la tierra, y otro horizontal con velocidad constante  $V_{0x}$

La aceleración en el movimiento vertical hacia arriba es igual aceleración cuando se dirige hacia abajo. El cuerpo al ascender disminuye la velocidad hasta que por un instante, su velocidad vertical es cero, en el punto más alto, y luego desciende empleando en regresar al nivel desde el que fue lanzado, el mismo tiempo que cuando subió.



El movimiento del proyectil es la composición de un movimiento vertical bajo la acción de la aceleración de la gravedad y un movimiento horizontal en el que se realizan desplazamientos iguales en tiempos iguales.



Si se considera el origen, es decir el punto (0, 0), en el punto de partida del proyectil, al cabo de determinado tiempo el objeto ocupa la posición (x, y) y su velocidad es  $v = (V_x, V_y)$ , donde:

$$X = V_x \cdot t$$

$$Y = V_{oy} + \frac{1}{2}gt^2$$

$$V_y = V_{oy} + gt$$

Puesto que la componente de la velocidad en el eje x es constante, su valor en cualquier instante es el mismo que en el momento del lanzamiento,  $V_{0x}$ .

La aceleración solo tiene componente en el eje y que es la aceleración de la gravedad.

Como se ha dicho, la velocidad de un objeto en cualquier punto de la trayectoria es un vector tangente a la misma.

A partir de las expresiones para x y para y es posible determinar la posición del objeto en cualquier instante de tiempo.

Por ejemplo, si se toma el sentido positivo del eje y hacia arriba, a una posición por debajo del nivel desde el cual se ha lanzado un objeto le corresponde un valor y negativo.

### **UNIDADES.**

Unidades de la velocidad (v): m/s

Unidades del tiempo (t): segundos (s)

Unidades de la distancia x, y: metros (m)

Unidades de la aceleración de la gravedad (g):  $m/s^2$

### **ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE PROYECTILES**

1.- Para realizar los cálculos de las **velocidades iniciales**.

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos a_0$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin a_0$$



2.- Para calcular **las componentes de la velocidad "v"** en cualquier instante.

$$V_x = V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$V_y = V_{0y} - gt$  también para la velocidad en y  $V_y$  se puede utilizar

$$V_y^2 = V_{0y}^2 - 2gy$$

Si observamos, solamente tenemos que calcular la velocidad en "y", porque la de "x" es la misma que la inicial.

3.- Para poder **calcular la velocidad en cualquier instante** aplicamos la siguiente fórmula:

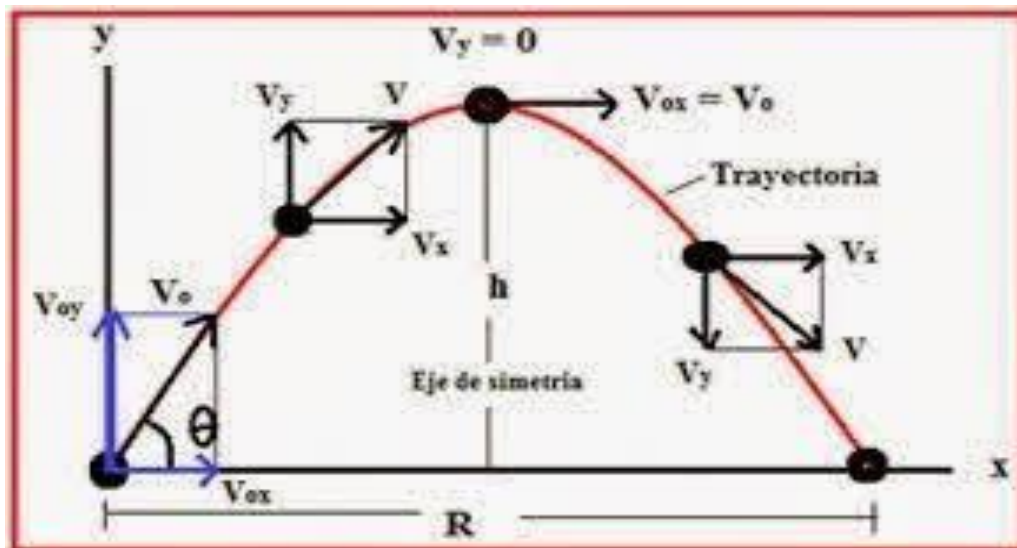
$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

4.- Para calcular **la posición horizontal y vertical** en cualquier instante.

$$X = V_{0x} \cdot t$$

$$Y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

**PARA EFECTOS DE TODOS LOS CÁLCULOS Y EN VISTA QUE TODOS LOS ÁNGULOS ESTÁN EN GRADOS, LA CALCULADORA DEBE ESTAR EN D (degrees) grados.**





## EJEMPLO

Una persona lanza en forma oblicua una pelota con una velocidad de 18 m/s y un ángulo de  $53^\circ$ . Despreciando la resistencia del aire y considerando el inicio del movimiento desde que se suelta la pelota como  $t=0$ , calcular

a. ¿cuál es la velocidad de la pelota 1 segundo después de lanzada?

Lo primero que hay que hacer, es hallar las componentes de la velocidad inicial:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos a_0 = 18 \cdot \cos 53^\circ = V_{0x} = 10.83 \text{ m/s}$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin a_0 = 18 \cdot \sin 53^\circ = V_{0y} = 14.37 \text{ m/s}$$

Ahora se procede a hallar la velocidad cuando han transcurrido 1 seg:

La velocidad en X,  $V_x$  no cambia por lo tanto es la misma componente  $V_{0x} = 10.83 \text{ m/s}$

La velocidad en Y si varía y se halla por la fórmula

$$V_y = V_{0y} - gt \quad V_y = 14.37 - 9.8(1) \quad V_y = 4.57 \text{ m/s}$$

Se hallaron las dos componentes de la velocidad, ahora hay que hallar la velocidad mediante la relación

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

$$V = \sqrt{10.83^2 + 4.57^2} \quad V = \sqrt{117.29 + 20.88} \quad V = \sqrt{138.17} \quad V = 11.75 \text{ m/s}$$

b. ¿Cuál es la posición de la pelota en ese instante?

Para determinar la posición de la pelota hay que hallar la distancia horizontal X y la distancia vertical Y

$$X = V_{ox} \cdot t = (10.83)(1) \quad X = 10.83 \text{ m}$$

$$Y = V_{oy} t - \frac{1}{2}gt^2 \quad Y = 14,37(1) - \frac{1}{2}(9.8)(1)^2 \quad Y = 14,37 - 4.9 \quad Y = 9.47 \text{ m}$$

c. Calcule el instante en que la pelota llega al punto más alto de su trayectoria.

Cuando la pelota alcanza el punto más alto de la trayectoria, la componente  $V_y$  se anula, (observe en la gráfica que en el punto más alto de la trayectoria la componente  $V_y$  es cero), es decir, la velocidad de la pelota está constituida solamente por la componente  $V_x$ .

Para hallar el tiempo:

$$V_y = V_{oy} - gt \quad V_y = 0 \quad 0 = V_{oy} - gt \quad gt = V_{oy} \quad t = \frac{V_{oy}}{g} = \frac{14.37}{9.8} \quad t = 1.47 \text{ seg}$$

d. ¿Cuál es el valor de la altura máxima?

El valor de la altura máxima corresponde al que alcanza en el tiempo hallado en el punto anterior, entonces se halla la altura con ese tiempo

$$Y = V_{oy} t - \frac{1}{2}gt^2 \quad Y = 14,37(1.47) - \frac{1}{2}(9.8)(1.47)^2 \quad Y = 21.12 - 10.59 \quad Y = 10.53 \text{ m}$$

También se puede hallar por otra forma

$$V_y^2 = V_{0F}^2 - 2gy \quad \text{haciendo } V_y = 0, \text{ entonces}$$

$$2gy = V_{0F}^2$$

$$Y = \frac{V_{0y}^2}{2g} \quad Y = \frac{14.37^2}{2(9.8)} = \frac{206.49}{19.6} \quad Y = 10.53 \text{ m}$$

e. ¿Qué tiempo tarda desde que es lanzado hasta que toca el piso?

Para el tiempo que la pelota toque el suelo desde que fue lanzada, la distancia vertical Y es cero. Por lo tanto, trabajamos con la fórmula para hallar el tiempo

Existe una fórmula para hallar el tiempo que tarda un objeto en toda su trayectoria en el movimiento de proyectiles

$$t = \frac{2V_{0y}}{g}$$

Reemplazando los valores  $t = \frac{2(14.37)}{9.8}$

$$t = \frac{28.74}{9.8} \quad t = 2.93 \text{ seg}$$

**Nota que el tiempo que tarda en toda su trayectoria es el doble del tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima**

f. Hallar su alcance horizontal máximo (R)

Para el alcance horizontal en el movimiento de lanzamiento de proyectiles o movimiento parabólico existe la siguiente relación

$$R = \frac{V_0^2 \text{Sen}(2\theta)}{g} \quad \text{Reemplazando valores}$$

$$R = \frac{18^2 \text{Sen}(2(53^\circ))}{9.8}$$

$$R = \frac{324 \text{Sen}(106^\circ)}{9.8}$$

$$R = \frac{311.45}{9.8} \quad R = 31.78 \text{ m}$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un portero saca el balón desde el césped a una velocidad de 26 m/s. Si la pelota sale del suelo con un ángulo de  $40^\circ$  y cae sobre el campo sin que antes lo toque ningún jugador, calcular:

- Altura máxima del balón
- Distancia desde el portero hasta el punto donde caerá en el campo
- Tiempo en que la pelota estará en el aire

2. Están jugando en el patio de un colegio, cuando el balón sale al exterior por encima de la valla del campo. Un hombre le da una patada al balón para devolverlo al interior. Sabiendo que el muro del patio tiene 3 m de altura, que el hombre está a 53 m del muro y que patea el balón a 24 m/s con un ángulo de  $55^\circ$ , averiguar si consigue que la pelota vuelva a entrar al patio o, por el contrario pasa sobre el muro

3. En una prueba de atletismo de lanzamiento de peso, el atleta logra una marca de 22 m. Sabiendo que la bola sale de su mano a 2 m del suelo y con un ángulo de  $45^\circ$ , averiguar la velocidad inicial del lanzamiento.

4. Lanzamos una pelota con un ángulo de  $60^\circ$  respecto al suelo con una velocidad de 30 m/s. Calcular la altura máxima de la pelota y el alcance máximo

5. Se lanza un proyectil desde el suelo con una velocidad de 100 m/s un ángulo de  $45^\circ$  calcular el vector velocidad y posición del proyectil

- a) A los 3 segundos
- b) A los 8 segundos

5. Un futbolista chuta un balón hacia la portería con una velocidad de 30m/s y un ángulo de  $30^\circ$  Calcular:

- a) Altura máxima
- b) El alcance
- c) Vector velocidad al llegar al suelo

6. En unos juegos olímpicos un lanzador de jabalina consigue alcanzar una distancia de 90 m con un ángulo de inclinación de  $45^\circ$ . Calcular la velocidad inicial de lanzamiento
7. Un arquero, realizando el máximo esfuerzo, es capaz de impulsar una flecha a una velocidad inicial de 80 m/s. Si dispara con un ángulo de  $30^\circ$ . Determine:
- a) ¿Pasará la flecha por encima de un promontorio de 50 m de alto situado a 100m de distancia?
  - b) ¿Qué velocidad tiene la flecha en la vertical del promontorio?
8. Un objeto es lanzado con una velocidad de 9 m/s y un ángulo de  $30^\circ$ , hallar su alcance horizontal y la altura máxima alcanzada.
9. Un proyectil es lanzado con una velocidad de 25 m/s y un ángulo de  $41^\circ$ , hallar su velocidad a los 3 segundos después de haber sido lanzado.
10. Un jugador en un partido de fútbol patea una pelota con una velocidad de 18 m/s y un ángulo de  $32^\circ$ , ¿a qué distancia se debe ubicar un compañero para golpear la pelota hacia el arco?