Planeación de aula.

Identificación

Grado: 9°	**Docente: Herneth Antonio Menco Menco**	**Fecha : 18/10/2023**
Área / Asignatura : Estadística		
Periodo académico: C u a r t o	**Unidad : I V**	
Eje temático : Probabilidad de la ocurrencia sucesiva de eventos	**Tiempo de ejecución: 4 semanas**	
Pensamiento: Aleatorio y sistemas de datos.	**Competencias: Comunicación, representación y modelación**	

Aprendizajes

1. Objetivos de aprendizajes

- Reconoce situaciones aleatorias en contextos cotidianos.
- Identifica y enumera los resultados favorables de ocurrencia de un evento simple y se anticipa a esa ocurrencia

2. Referentes curriculares

EBC: Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

DBA:

✧ Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización. (10)

✧ Encuentra el número de posibles resultados de experimentos aleatorios, con reemplazo y sin reemplazo, usando técnicas de conteo adecuadas, y argumenta la selección realizada en el contexto de la situación abordada. Encuentra la probabilidad de eventos aleatorios compuestos. (11)

3. **Desempeños Esperados**

- Define el método para recolectar los datos (encuestas, observación o experimento simple) e identifica la población y el tamaño de la muestra del estudio.
- Construye diagramas de caja y a partir de los resultados representados en ellos describe y compara la distribución de un conjunto de datos.
- Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización.
- Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias.

4. **Recursos y materiales**

- PC, Video Beam
- Texto de Matemáticas 9° MEN, Educación de Calidad (Secundaria Activa)
- Talleres
- Copias.
- Trabajos académicos y de campo en equipos.
- Aplicación de encuestas.

Momentos de la clase

5. **Inicio /exploración de saberes previos**

El docente plantea actividad enfocadas hacia la exploración de saberes previos de los estudiantes, la importancia y necesidad de dicho aprendizaje. Sirve como insumo de diagnóstico básico para identificar los conocimientos y la comprensión de los estudiantes frente a la temática abordar y las actividades a realizar. El tiempo que se promedia para el desarrollo de este momento es de 20 minutos.

Actividad:

1. Se realiza en forma de conversatorio en donde se promueve la escucha y análisis de la información que se tiene sobre el uso de la información que se maneja en los diversos medios de comunicación, redes sociales, diversos entes que recolectan, manipulan y comparten información, ademas de la información que se maneja en el entorno (IE, Municipio, viveiendas y grupos socio-culturales)

2. Algunos de los conceptos que abordaremos, ya son conocidos de los cursos anteriores, y a partir de ellos construirás otros nuevos. Recordaremos aquí lo visto:
   Piensa en la experiencia aleatoria al hacer los lanzamientos:
   a. Una moneda

   b. Un dado
   En cada caso, ¿qué posibilidades pueden ocurrir?
   Escribe en tu cuaderno las posibles respuestas y después compara y analiza con tus compañeros.

3. Se les pide a los estudiantes que utilicen algunos argumentos que piensen que han sido expuestos antes que sucedan y que relacionen los diversos eventos con la temática a abordar.

4. Luego se establecen intersecciones entre las opiniones y/o argumentaciones expresadas, para fomentar criterios de aprendizajes entre los mismos estudiantes.

5. Finalmente se establecen la conceptualización de los temas a abordar para que ellos mismos encuentren el común denominador y afiancen los aprendizajes entre los conceptos ya definidos y los que cada uno pretenda relacionar.

6. **Contenido / Estructuración**

PROBABILIDAD DE LA OCURRENCIA SUCESIVA DE EVENTOS

La **probabilidad** de cualquier tipo de **evento** — simple, compuesto, independiente, dependiente — siempre sigue la misma fórmula básica:

$$\text{Probabilidad de que un evento ocurra} = \frac{\text{Tamaño del espacio del evento}}{\text{Tamaño del espacio muestral}}$$

La probabilidad es la razón entre los tamaños de los espacios de eventos y **muestral**. Para algunas situaciones, como **eventos dependientes** e independientes, existen maneras de calcular estos números sin tener que pasar por el proceso de encontrar y contar los **resultados** posibles uno por uno, lo que es a veces tedioso y propenso a errores.

Probabilidad de Eventos Dependientes:

Para encontrar la probabilidad de eventos dependientes, podemos usar la **Principio Fundamental de Conteo** o las fórmulas **factoriales** de las **permutaciones** y las combinaciones para encontrar los tamaños de los espacios de eventos y muestral.

El Principio Fundamental de Conteo encuentra el número de permutaciones y combinaciones de la siguiente manera:

Cuando se escogen *k* de *n* objetos, el número de permutaciones es $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$

Cuando se escogen *k* de *n* objetos, el número de combinaciones es $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots(2)(1)}$

Las fórmulas factoriales calculan permutaciones y combinaciones de esta manera:

Cuando se escogen *k* de *n* objetos, el número de permutaciones es $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Cuando se escogen *k* de *n* objetos, el número de combinaciones es $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Encontrar el **espacio de eventos** normalmente requiere un poco de reflexión e imaginación para identificar todas las maneras en las que un evento puede suceder.

Problema **Sacas una canica de una bolsa con 20 canicas rojas, 20 blancas, y 10 verdes. Te quedas con la canica y sacas otra. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica roja y luego sacar una canica verde?**

permutación

Queremos sacar primero una canica roja y luego una canica verde, entonces el orden importa. Este es un problema de permutaciones

$$\frac{50!}{(50-2)!} \text{ ó } 50 \bullet 49$$

espacio muestral $= 2450$

El tamaño del espacio muestral es el número de todas las permutaciones posibles de 2 canicas. La fórmula factorial para esto es $\frac{n!}{(n-k)!}$. En este caso,

estamos escogiendo 2 de 50 canicas, entonces $n = 50$ y $k = 2$. (Podrías usar también el Principio Fundamental de Conteo: Hay 50 opciones para la primera canica y 49 para la segunda.)

Rojo, Verde

El tamaño del espacio de eventos es el número de todas las posibles combinaciones para las cuales la primera canica es roja y la segunda es verde

estamos escogiendo 2 de 50 canicas, entonces $n = 50$ y $k = 2$. (Podrías usar también el Principio Fundamental de Conteo: Hay 50 opciones para la primera canica y 49 para la segunda.)

Rojo, Verde

El tamaño del espacio de eventos es el número de todas las posibles combinaciones para las cuales la primera canica es roja y la segunda es verde

$20 \cdot 10$

espacio de eventos $= 200$

¿Cuántas maneras hay de que esto pase? ¡No cometas el error de creer que sólo hay una: roja y verde! Hay 20 canicas rojas diferentes que pueden ser escogidas al principio. Luego hay 10 canicas verdes diferentes para escoger después. El Principio Fundamental de Conteo dice que multipliquemos estas para obtener el número de formas de sacar rojo y luego verde

$$P(\text{Rojo, Verde}) = \frac{200}{2450} = \frac{4}{49}$$

Ahora la probabilidad de sacar roja y verde es la razón de todas las maneras de sacar esos dos colores en ese orden con todas las permutaciones posibles

Solución

La probabilidad de que salgan canicas roja y verde es $\frac{4}{49}$.

Cuando buscamos un espacio de eventos, a veces es útil pensar en el evento que queremos como eliminando resultados particulares de eventos individuales. Luego tenemos que encontrar el número de permutaciones o combinaciones para el resto de los resultados. En el ejemplo anterior de las canicas, eliminado reojo para la primera sacada no cambió el número de canicas verdes que quedaban disponibles. Sin embargo, si queríamos la probabilidad de sacar una roja y luego otra rojo, existen 20 • 19 maneras de hacerlo cuando el orden importa.

Veamos el siguiente ejemplo que implica combinaciones:

Problema **Una organización de una escuela tiene 30 miembros. Cuatro miembros serán escogidos al azar para una entrevista con el periódico de la escuela sobre el grupo. ¿Cuál es la probabilidad de que Tom y Cindy sean escogidos?**

combinación

No hay razón por la que una persona se considere diferente a otra, basados en el orden en que son escogidas, entonces los espacios de eventos y muestral involucran combinaciones y no permutaciones

$$\frac{30!}{(30-4)!4!}$$

$$\frac{30\bullet 29\bullet 28\bullet 27\bullet 26\bullet\ldots\bullet 2\bullet 1}{(26\bullet\ldots\bullet 2\bullet 1)(4\bullet 3\bullet 2\bullet 1)}$$

$$\frac{26\bullet\ldots\bullet 2\bullet 1}{26\bullet\ldots\bullet 2\bullet 1}\cdot\frac{30\bullet 29\bullet 28\bullet 27}{4\bullet 3\bullet 2\bullet 1}$$

$$1\bullet\frac{30\bullet 29\bullet 28\bullet 27}{4\bullet 3\bullet 2\bullet 1}$$

El tamaño del espacio muestral es el número de todas las posibles combinaciones de 4 miembros. La fórmula para las combinaciones es $\frac{n!}{(n-k)!k!}$. En este caso, estamos escogiendo 4 de 30 miembros, entonces n = 30 y k = 4. (También podrías usar el Principio Fundamental de Conteo para encontrar el numerador y el denominador.)

27,405

El tamaño del espacio de eventos es el número de todas las combinaciones posibles que incluyen a Tom y Cindy.

Tom, Cindy, __?__, __?__

Encontrar otras 2 personas de las 28 restantes.

Si Tom y Cindy deben ser escogidos, entonces ya conocemos a 2 de nuestras 4 personas. Ahora el problema es ¿cómo podemos llenar esos 2 espacios con los otros 28 miembros? Este es un nuevo problema de combinaciones, escogiendo 2 de 28 miembros.

$$\frac{28!}{(28-2)!2!}$$

$$\frac{28\bullet 27}{2\bullet 1}$$

378

Para usar la fórmula, sea n = 28 y k = 2.

$$P(\text{Tom} \quad \text{y} \quad \text{Cindy}) = \frac{378}{27{,}405} = \frac{2}{145}$$

Ahora la probabilidad de que Tom y Cindy sean escogidos es la razón entre las combinaciones que los incluyen y todas las posibles combinaciones

Solución La probabilidad de que Tom y Cindy sean escogidos es $\frac{2}{145}$.

Este es un pequeño consejo de aritmética: podría ser más fácil simplificar la fracción de probabilidad dejando los tamaños muestral y de eventos en su forma factorizada. Por ejemplo:

$$P(\text{Tom} \quad \text{y} \quad \text{Cindy}) = \frac{28 \bullet 27}{2 \bullet 1} \div \frac{30 \bullet 29 \bullet 28 \bullet 27}{4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}$$

Dividimos fracciones invirtiendo el divisor y multiplicando. Luego podemos eliminar factores comunes en el numerador y en el denominador:

$$\frac{28 \bullet 27}{2 \bullet 1} \bullet \frac{4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}{30 \bullet 29 \bullet 28 \bullet 27}$$

$$\frac{4 \bullet 3}{30 \bullet 29}$$

$$\frac{2 \bullet 2 \bullet 3}{2 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 29}$$

Ejercicios:

Una bolsa de canicas tiene 20 canicas rojas, 20 blancas, y 10 verdes. Si sacamos tres canicas, ¿cuál es la probabilidad de que saquemos exactamente dos canicas rojas?

A) $\frac{2}{27}$

B) $\frac{38}{245}$

C) $\frac{1}{117{,}600}$

D) $\frac{19}{196}$

A) Incorrecto. Recuerda que hay muchas canicas de cada color, y cada una debe ser tratada como un resultado separado. El espacio de eventos es las combinaciones para las que hay dos canicas rojas y una que no es roja. Hay 20 opciones para la primera roja, 19 para la segunda roja, y 30 para la del otro color. Como el orden no importa, tenemos que dividir entre el número de maneras de arreglar las tres canicas. La respuesta correcta es $\frac{19}{196}$.

B) Incorrecto. Esta es la probabilidad de escoger dos canicas rojas cuando sólo dos canicas son sacadas; es también la probabilidad que por lo menos dos canicas son escogidas. Para que dos de tres canicas sean rojas, el espacio de eventos es las combinaciones para el que hay dos canicas rojas y una que no es roja. La respuesta correcta es $\frac{19}{196}$.

C) Incorrecto. Esta es la probabilidad de sacar tres canicas específicas (como una canica roja con una pequeña marca en forma de x, la blanca que rayó tu hermanito, y la blanca que se volvió amarilla con el tiempo). Para este problema, quieres que el espacio de eventos sea las combinaciones para las que hay dos canicas rojas (cualquiera de las 20) y una que no es roja. La respuesta correcta es $\frac{19}{196}$.

D) Correcto. El espacio de eventos es las combinaciones para las que hay dos canicas rojas y una que no es roja. Existen 20 opciones para la primera roja, 19 opciones para segunda roja, y 30 opciones para la de otro color. Como el orden no importa, tenemos que dividir el número de formas de arreglar las tres canicas. El tamaño del espacio de eventos es $\frac{20 \bullet 19 \bullet 30}{3 \bullet 2 \bullet 1}$. El espacio muestral es todas las posibles combinaciones, que son $\frac{50 \bullet 49 \bullet 48}{3 \bullet 2 \bullet 1}$ La probabilidad es la razón del tamaño del espacio de eventos y el tamaño del espacio muestral, lo que se simplifica como $\frac{19}{196}$.

Probabilidades de Eventos Dependientes e Independientes

Hemos estado usando el Principio Fundamental de Conteo y las fórmulas de permutación y combinación para calcular la probabilidad de una serie de eventos en su conjunto. También podemos calcular la probabilidad de un evento a la vez. Podemos usar la siguiente regla para calcular la probabilidad de **eventos independientes**:

Si A y B son eventos independientes, *P*(*A* y *B*) = *P*(*A*) • *P*(*B*).

En general, para *cualquier* número independiente de eventos, la probabilidad de que todos los eventos sucedan es el producto de las probabilidades de que los eventos individuales sucedan.

Entonces podemos encontrar la probabilidad de muchos eventos independientes encontrando la probabilidad de cada evento independiente, y luego multiplicándolas todas. Cada evento individual tendría la misma probabilidad incluso si ninguno de los otros eventos ocurre.

La probabilidad de eventos dependientes puede ser encontrada de una forma casi igual. Considera algunos de los eventos dependientes con los que hemos estado trabajando, como el ejemplo de las canicas. La probabilidad para ese ejemplo también implicaba productos.

$$P(\text{exactly 2 red marbles}) = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1} \div \frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{20\cdot 19\cdot 30}{50\cdot 49\cdot 48}$$

Si vemos esto como tres eventos separados, ¿cuáles son las probabilidades individuales?

Primera sacada: $P(\text{Roja}) = \frac{20}{50}$

Segunda sacada: $P(\text{Roja}) = \frac{19}{49}$

Tercera sacada: $P(\text{No Roja}) = \dfrac{30}{48}$

Nota el producto de estas probabilidades individuales:

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 30}{50 \cdot 49 \cdot 48}$$

¡Es el mismo resultado! Entonces somos capaces de calcular la probabilidad de una serie de eventos dependientes encontrando la probabilidad de cada evento individual y luego multiplicándolas juntas. Pero, las probabilidades individuales no son las mismas que si los eventos ocurrieran solos, como sería el caso con los eventos independientes. Con los eventos dependientes, las probabilidades de eventos posteriores son diferentes a las que serían si hubieran ocurrido por sí solos.

Si A y B son eventos dependientes, $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B \text{ después } A)$
donde *P(B* después *A)* es la probabilidad de que ocurra B después de que A haya ocurrido.

En general, para cualquier número de eventos independientes, la probabilidad de que todos los eventos sucedan es el producto de las probabilidades de que sucedan los eventos individuales, siempre y cuando la ocurrencia de un evento anterior sea incluida cuando se encuentran las probabilidades de eventos posteriores.

Problema **Te has sentado accidentalmente en tu teléfono celular, y cada vez que te mueves, se marcan número diferentes en tu agenda. Tienes guardados 16 números, y llamas a 4 de ellos antes de pararte. ¿Cuál es la probabilidad de que Mary, Lulu, Bo, y Dan hayan recibido una llamas?**

Mary recibió una llamada
Lulu recibió una llamada
Bo recibió una llamada
Dan recibió una llamada

Primero definiremos los eventos individuales. El orden no importa

$$P(\text{Primera}) = \frac{4}{16}$$

$$P(\text{segunda}) = \frac{3}{15}$$

$$P(\text{Tercera}) = \frac{2}{14}$$

$$P(\text{Cuarta}) = \frac{1}{13}$$

Ahora encontremos la probabilidad de cada evento. Para la primera llamada, hay 4 números en el espacio de eventos y 16 números de donde escoger, Si la primera llamada es para Mary, Lulu, Bo, o Dan, para la segunda llamada habrá 3 posibilidades de llamar a alguien en el evento y 15 números restantes que podrían ser llamados. Para la tercera llamada, habría 2 opciones de 14 números, y luego sólo 1 de 13 números para la última llamada.

Usa estos números para encontrar las probabilidades de cada llamada.

$$P(\text{Se llaman las 4}) = \left(\frac{4}{16}\right)\left(\frac{3}{15}\right)\left(\frac{2}{14}\right)\left(\frac{1}{13}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{13}\right)$$

$$\frac{1}{1820}$$

Usa estos números para encontrar las probabilidades de cada llamada.

La probabilidad de que los cuatro eventos ocurran es el producto de las probabilidades individuales.

Encontremos de nuevo la probabilidad usando la fórmula de las combinaciones. Queremos una combinación porque el orden no importa

$$\frac{16!}{(16-4)!4!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

El espacio muestral es el número de combinaciones de 4 teléfonos de 16. Aquí, $k = 4$ y $n = 16$.

$$\frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1$$

El espacio de eventos es el número de combinaciones para escoger 4 de 4 teléfonos. Hay sólo una forma de hacer eso — ¡los 4 son llamados! Podemos probar esto con la fórmula (recuerda que 0! = 1).

$$\frac{1}{\left(\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\right)}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}=\frac{1}{1820}$$

La probabilidad es la razón de los tamaños del evento y la muestra

Nota que el resultado es el mismo que obtuvimos calculando individualmente

Solución

$$P(\text{ Mary, Lulu, Bo, Dan son llamados })=\frac{1}{1820}$$

Ejercicios:

Un grupo de 8 amigos están jugando un juego de mesa en el que los jugadores compiten para llegar al último cuadro del tablero. Lo amigos van a reconocer al primer, segundo y tercer lugar.

Asumiendo que todos los jugadores tienen las mismas probabilidades de ganar, ¿cuál es la probabilidad de que Juanita quede en primer lugar, y que Bill o Susan quede en segundo y Bill o Susan quede en tercero?

A) $\frac{1}{168}$

B) $\frac{1}{336}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{128}$

A) Correcto. Tratando cada lugar como un evento separado, la probabilidad de que Juanita quede en primero es $\frac{1}{8}$. Luego hay dos opciones de los 7 jugadores restantes para el segundo lugar, Bill o Susan, entonces la probabilidad es $\frac{2}{7}$. Finalmente, queda sólo una opción para el tercer lugar: Bill o Susan, el que no haya quedado en segundo lugar. La probabilidad para eso es $\frac{1}{6}$. La probabilidad de que Juanita quede en primero y que Bill y Susan queden en segundo y tercero (en cualquier orden) es $\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{168}$.

B) Incorrecto. Esta es la probabilidad para que gente en particular quede en los tres lugares. Pero el segundo lugar podría ser tomado por Bill o Susan, por lo que hay 2 resultados en el espacio de eventos, no 1. La respuesta correcta es $\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{168}$.

C) Incorrecto. Esta es la probabilidad de que Juanita quede en primero, pero ignora quién queda en segundo y tercero. La respuesta correcta es $\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{168}$.

D) Incorrecto. Esta sería la probabilidad si los eventos fueran independientes, pero no lo son, el espacio muestral decrece cada que alguien obtiene un lugar. La respuesta correcta es $\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{168}$.

Existen varias formas de encontrar las probabilidades de eventos dependientes. La secuencia de eventos puede ser tratada como un todo, en ese caso el Principio Fundamental de Conteo o las fórmulas de permutaciones y combinaciones son usadas para encontrar los tamaños del espacio de eventos y el espacio muestral.

O cada evento puede ser tratado separadamente, don de las probabilidades de cada evento son multiplicadas para encontrar la probabilidad de toda la cadena de eventos:

> **Si A y B son eventos dependientes, *P*(*A* y *B*) = *P*(*A*) • *P*(*B* después *A*) donde *P(B* después *A)* es la probabilidad de que ocurra B después de que A haya ocurrido.**

Sin importar el método, debemos notar que cuando los eventos son dependientes, el tamaño de los espacios muestral y de eventos pueden cambiar con el tiempo, porque la ocurrencia de un evento afecta los resultados de otros eventos.

Cálculo de probabilidades

Analicemos:

¿Cuál es la probabilidad de todos los sucesos elementales asociados a un experimento?

En el caso del lanzamiento de la moneda, hemos visto que hay dos sucesos elementales posibles: cara y sello.

$$P(\text{cara}) + P(\text{sello})$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

En el lanzamiento de un dado, ¿cuáles son los sucesos elementales posibles?

Son seis: sacar 1, sacar 2, sacar 3, sacar 4, sacar 5 y sacar 6.

Si el dado es correcto, cada uno de estos sucesos es equiprobable, entonces:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = 1$$

> La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio es 1.

¿Cuál es la probabilidad de no sacar 3?

La probabilidad de no sacar 3 es igual a sacar cualquiera de los números menos 3.

La probabilidad de sacar 3 es $P(3) = \frac{1}{6}$

Como la suma de las probabilidades es 1, entonces, la probabilidad de no sacar 3 es:

$$P(\text{no } 3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

> En general:
> La probabilidad de ocurrencia de un suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que la componen.

Probabilidad de eventos combinados. Regla de la suma

Veamos la siguiente situación:

En una caja se tienen diez tarjetas numeradas del 1 al 10. Se extrae una tarjeta y se quiere determinar:

a. La probabilidad de extraer una tarjeta que tenga el número 4.
b. La probabilidad de sacar el número 9.
c. La probabilidad de elegir al número 4 ó 9.

Solución

El espacio muestral (EM o S) es el conjunto de tarjetas:

$$EM = S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

El número de elementos del espacio muestral es n (EM) = n(S) = 10.

La regla de Laplace nos dice que la probabilidad de sacar una tarjeta cualquiera es:

$$P(A) = \frac{\text{sucesos esperados}}{\text{sucesos posibles}}$$

La probabilidad de sacar la tarjeta con el número 4 es $P(4) = \frac{1}{10}$ porque solo hay una tarjeta con ese número entre 10.

La probabilidad también puede expresarse en forma decimal o en forma porcentual.

Así: $P(4) = \frac{1}{10} = 0.10 = 0.10 \times 100 = 10\%$

Como de cada número hay una tarjeta, entonces cada una de ellas tiene la misma probabilidad de salir.

$$P(9) = \frac{1}{10} = 0.10 = 0.10 \times 100 = 10\%$$

En c) se pide la probabilidad de que la tarjeta que se extraiga tenga el número 4 o el número 9. Cuando esto sucede, se suman las probabilidades de los eventos ya que «extraer 4» excluye la probabilidad de «extraer 9», esto es:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

$$P(4 \text{ o } 9) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$$

$$P(4 \text{ o } 9) = \frac{2}{10}$$

$$P(4 \text{ o } 9) = \frac{1}{5}$$

Esta probabilidad indica que puede suceder uno de los dos eventos mutuamente excluyentes; esto es, que salga la tarjeta con el número 4 o que salga tarjeta con el número 9.

Podemos concluir que:

Cuando dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente al realizar un experimento, se dice que éstos son mutuamente excluyentes o independientes y para terminar la probabilidad de dos eventos de este tipo se suman las probabilidades de que ocurra cada evento.

Diagrama de árbol

Una buena estrategia en la resolución de problemas es hacer una representación gráfica que esquematice y resuma la situación planteada y quizás visualice caminos de solución.

Una de estas representaciones es el diagrama de árbol, llamado así porque presenta divisiones y subdivisiones parecidas a ramas, brotes y hojas de un árbol.

Resulta muy útil a la hora de contar casos que se pueden dar en una cierta situación.

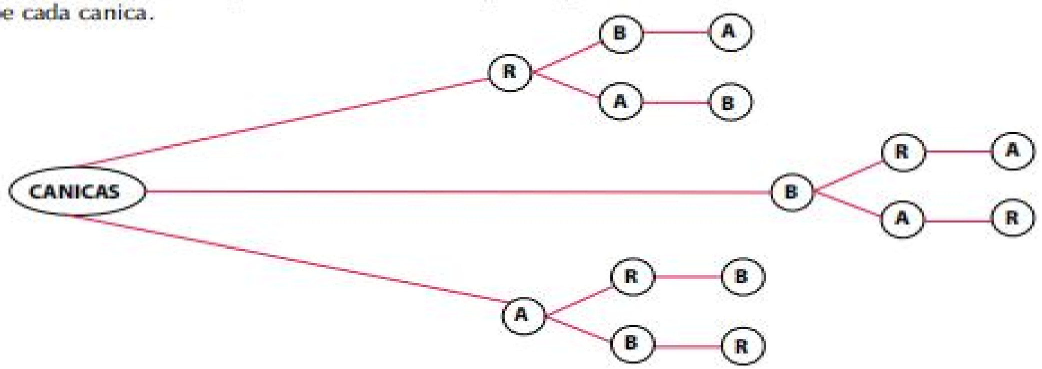
El diagrama de árbol es una forma de conocer el número de posibles resultados o arreglos que se pueden hacer con varios eventos, como en la siguiente situación:

Dos niñas están jugando y una debe adivinar el arreglo que a otra haga con tres canicas de diferente color, cuando éstas caigan en tres huecos alineados (roja, blanca y amarilla).

¿Cuántos posibles arreglos se pueden hacer con esas canicas?

Esto se puede representar a través de un diagrama, el cual se llama de árbol por la forma que adquiere.

Observa el diagrama que muestra dichos arreglos, según el hueco que ocupe cada canica.

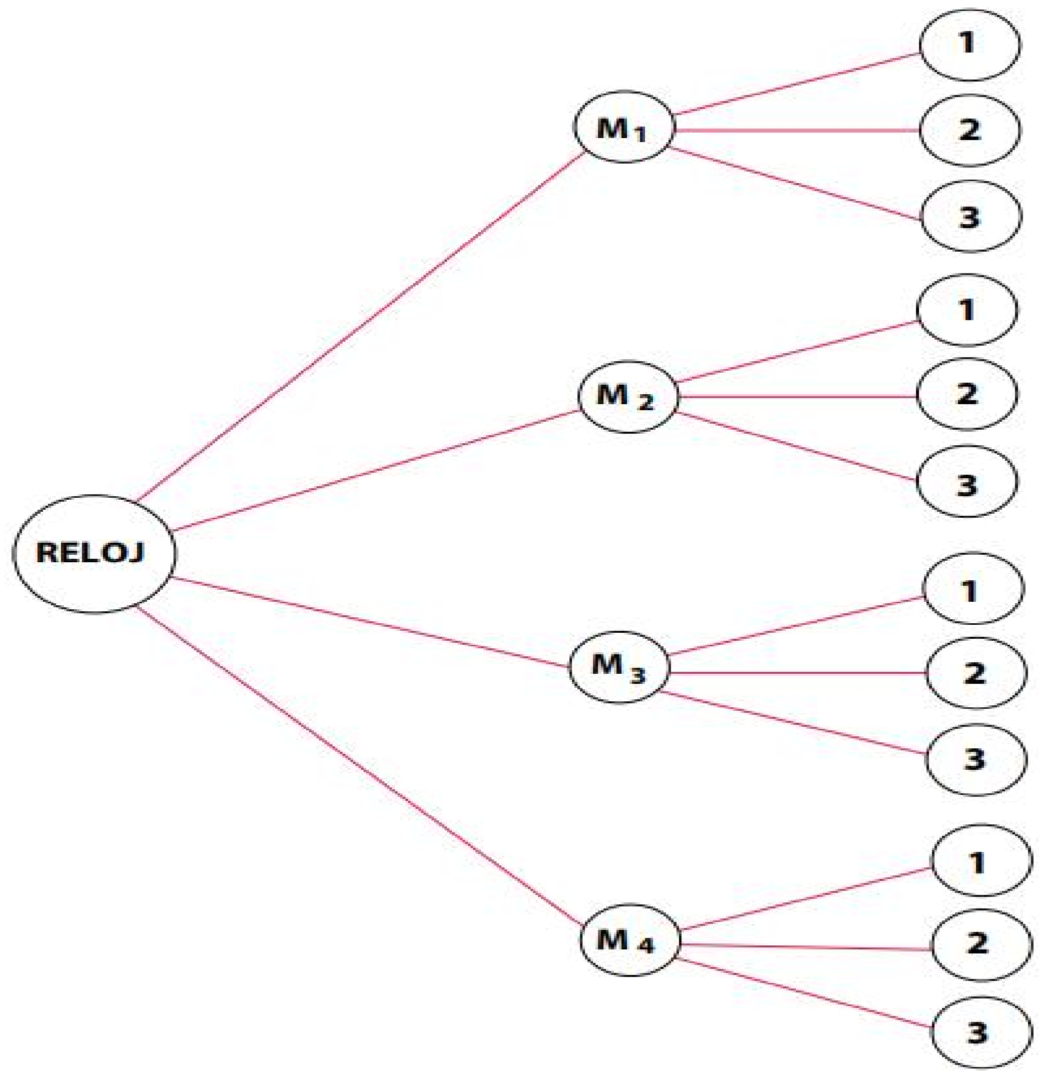


En el siguiente caso no es importante el orden:

Se desea comprar un reloj y la tienda ofrece cuatro marcas diferentes y tres modelos de cada una.

¿Cuántas opciones se tienen para elegir un reloj?

¿Qué probabilidad se tiene de elegir un reloj de la marca 1 y modelo 3?



La probabilidad de elegir un reloj de marca 1 y modelo 3 sería de $\frac{1}{12}$.

Ahora observa otro ejemplo en donde el e***xperimento es sin reemplazo***, es decir, sin que existan las mismas posibilidades, para cada tarjeta.

En cierta escuela se va a rifar una enciclopedia entre 10 de los alumnos más sobresalientes de primero, segundo y tercer grado. Hay 4 alumnos de tercero, 3 de segundo y 3 de primero y sus nombres se colocan en un papel depositándolos en una urna.

La rifa se hace por eliminación, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno de segundo grado gane la rifa en el cuarto intento?

Aquí el total de eventos son 10, ya que ése es el total de alumnos que participan en la rifa:

Probabilidad que tienen los alumnos de tercer grado: P (T). Probabilidad de los de segundo grado: P (S).

Probabilidad de los de primer grado: P (Las probabilidades que tienen los alumnos, antes de iniciar la rifa, son:

$$P(T) = \frac{4}{10}$$

$$P(S) = \frac{3}{10}$$

$$P(P) = \frac{3}{10}$$

Si en la primera extracción se sacó el nombre de un alumno de tercer grado y la rifa es por eliminación o sin reemplazo, entonces, para determinar las probabilidades se tiene lo siguiente:

Total de alumnos	= 9
Alumnos de tercero	= 3
Alumnos de segundo	= 3
Alumnos de primero	= 3

Las probabilidades son ahora: $P(T) = \frac{3}{6}$

$$P(S) = \frac{2}{6}$$

$$P(P) = \frac{1}{6}$$

En la segunda extracción se elimina el nombre de un alumno de primero.

Entonces, el total de alumnos es de 8 y disminuye en uno los alumnos de primero, con lo que las probabilidades son:

$$P(T) = \frac{3}{8}$$

$$P(S) = \frac{3}{8}$$

$$P(P) = \frac{2}{8}$$

En la tercera se extrae el nombre de un alumno de segundo; así pues, las probabilidades son:

$$P(T) = \frac{3}{7}$$

$$P(S) = \frac{2}{7}$$

$$P(P) = \frac{2}{7}$$

Y en la cuarta extracción se escoge el nombre de un alumno de primero, siendo las probabilidades:

$$P(T) = \frac{3}{6}$$

$$P(S) = \frac{2}{6}$$

$$P(P) = \frac{1}{6}$$

De aquí se tiene que la probabilidad de que un alumno de segundo grado gane la rifa en el cuarto

Intento es de: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

De este ejemplo se observa que, cuando un experimento se realiza sin remplazo, las probabilidades varían después de que sucede un evento.

Con base en los ejemplos mostrados se concluye que:

> El experimento de la urna de Bernoulli consiste en determinar la probabilidad de que un evento ocurra con o sin reemplazo.

Lee y analiza el siguiente texto. Invita a tus compañeros(as) de grupo.

Regla del producto

El concepto de probabilidad nace cuando algunos aficionados a los juegos de azar deciden estudiar las oportunidades que tienen de ganar. Así, se realizan experimentos y se obtienen reglas que actualmente se aplican en muchas situaciones en donde interviene el azar.

La regla del producto es una de las muchas que han surgido de esos experimentos y ahora corresponde ver en qué consiste.

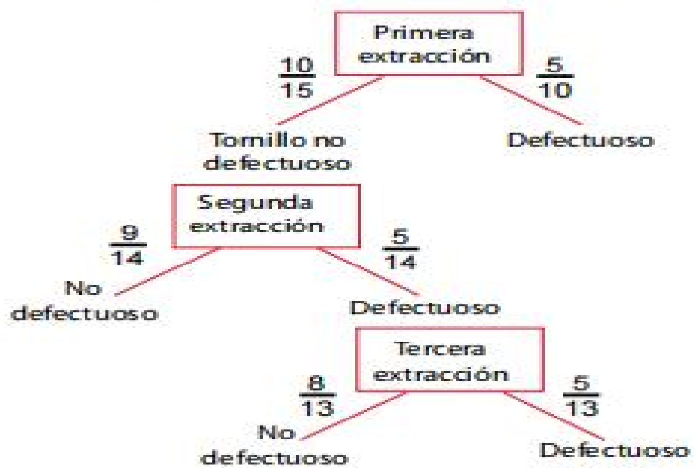
Analiza el siguiente ejemplo:

En una urna hay 15 tornillos, de los cuales 5 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que al sacar 3 tornillos al azar, éstos no sean defectuosos.

La probabilidad de que el primer tornillo no sea defectuoso es $\frac{10}{15}$, pues son 10 tornillos no defectuosos.

Si el primero no es defectuoso, la probabilidad de que el segundo no lo sea es de $\frac{9}{14}$, los casos favorables son 9 de los 14 posibles, ¡puesto que ya se ha sacado un tornillo! Y por último, si los dos primeros no salieron defectuosos, la probabilidad de que el tercero tampoco lo sea es de $\frac{8}{13}$.

Un diagrama de árbol nos ayuda a visualizar el experimento:



$$P\,(3 \text{ tornillos no defectuosos}) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{720}{2,730} = \frac{24}{91}$$

Observa un hecho importante en cada bifurcación: la suma de las probabilidades es 1.

En síntesis, se puede decir que:

> La probabilidad de dos o más eventos (cuando no hay reemplazo) es igual al producto de la probabilidad de cada uno, obtenida después de cada evento.

Ahora, analiza este otro ejemplo:

En un archivo hay 14 tarjetas blancas y 6 azules. Calcular la probabilidad de sacar dos tarjetas blancas, si al extraer la primera, ésta se reintegra al archivo.

La probabilidad de que la primera sea blanca es $\frac{14}{20}$ pues nuevamente en el archivo hay 20 tarjetas de las cuales 14 son blancas.

$$\frac{14}{20} \times \frac{14}{20} = \frac{196}{400} = \frac{49}{100}$$

De lo anterior se concluye que:

> La probabilidad de dos o más eventos (cuando sí hay reemplazo) es igual al producto de las probabilidades de ambos eventos independientes.

Practica y Transferencia
Actividad Grupal

Intégrate a un equipo y con cuaderno y lápiz a la mano, resuelve los problemas que se presentan a continuación. Compara tus resultados con los obtenidos por tus compañeros de otros grupos.

1. Los pesos de 40 estudiantes son:

60,	60,	65,	55,	63	48,	45,	38,	47,	65
50,	59,	54,	52,	56	57,	48,	49,	50,	50
36,	47,	62,	63,	47	52,	76,	74,	65,	50
61,	59,	58,	45,	49	52,	52,	52,	48,	48

a. Calcula la media de estos datos.
b. Agrupa los datos en intervalos:

(35.5 – 42.5) (42.5 – 49.5) (49.5 – 56.5)
(56.5 – 63.5) (63.5 – 70.5) (70.5 – 77.5)

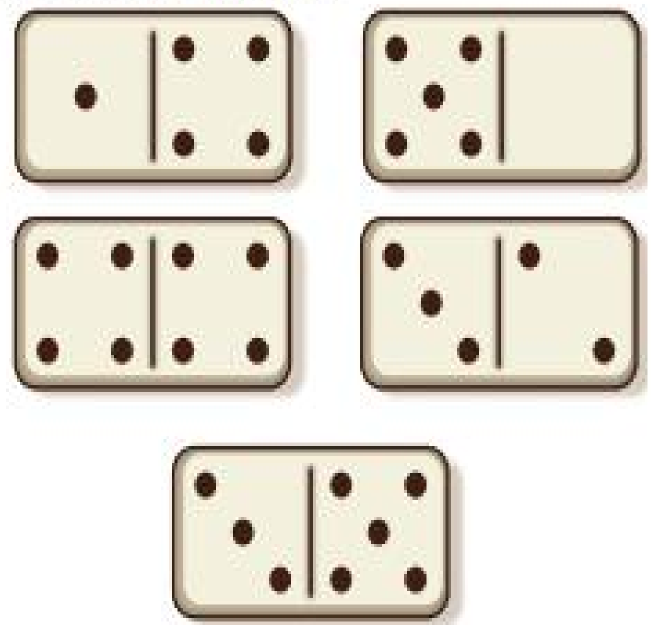
Haz una tabla de frecuencias f_i, calcula el valor central de cada intervalo x_i. Anota en ella los productos $f_i x_i$ y encuentra la media de datos agrupados.

c. Compara los valores de la media obtenidos en a) y b), ¿qué observas?

¿Encuentras ventajas en el procedimiento de datos agrupados?

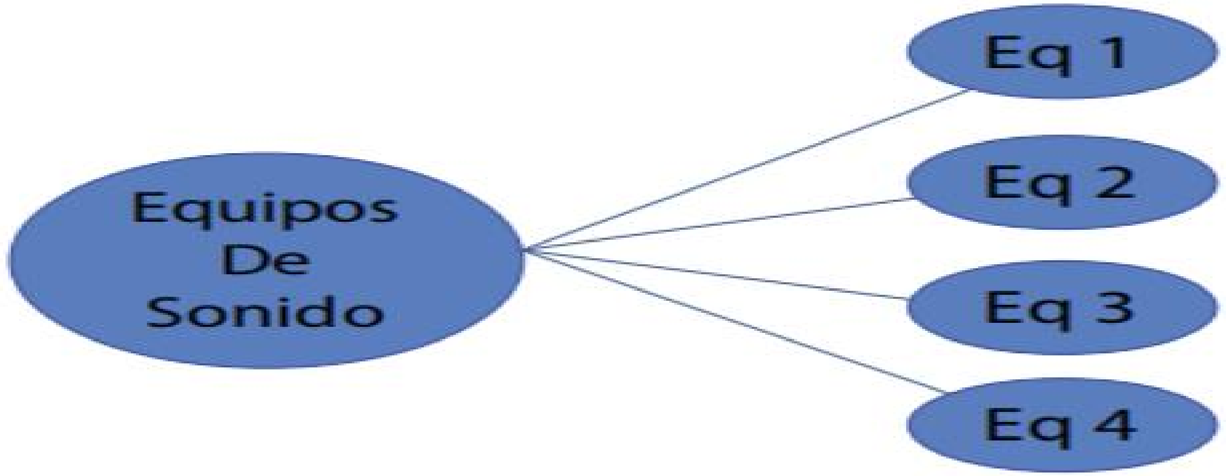
d. Construye el histograma con los datos agrupados, localiza la media en la gráfica.

2. Si en un juego de dominó se tienen boca abajo las siguientes fichas, determina las cuestiones señaladas.



a. ¿Cuál es el espacio muestral?
b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una ficha en la que una de sus partes tenga el número 5?
c. ¿Cuál la de obtener una ficha cuyos números sumen 5?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que si una persona toma una ficha ésta sea blanca?
e. Si la primera persona sacó la ficha (5,0), ¿cuál es la probabilidad de que una segunda persona levante una ficha que tenga un 4?
f. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una ficha tenga el número 6?
g. ¿Qué nombre recibe este tipo de evento?
h. Si al finalizar quedan las fichas (3,2), (5,3), (4,1), representa en tu cuaderno con un diagrama de árbol los diferentes arreglos que se forman según el orden en que salgan.
i. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden obtener con las 3 últimas fichas?
j. ¿Cuál es la probabilidad de que al tener 5 fichas, la primera persona saque la (5,3) y la segunda la (4,1)?

3. Completa el diagrama de árbol para conocer cuántas opciones tiene una persona que desea comprar un equipo de sonido cuando le ofrecen cuatro marcas diferentes y tres modelos distintos de cada marca.



¿Cuántas opciones diferentes tiene esa persona?
Explica si es importante el orden en este tipo de arreglo.

4. Al preguntar a diez personas qué tipo de música les gusta oír, contestaron lo siguiente: dos personas, música tropical; tres personas, música rock; cuatro personas, música norteña y una persona música romántica.

   a. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona oiga música: norteña, tropical, rock, romántica?
   c. ¿Cuál será la probabilidad de que alguna de estas personas oiga música norteña o tropical?
   d. ¿Cuál será la probabilidad de que alguna de estas personas oiga rock o romántica?

5. Al lanzar un dado 30 veces, ¿cuántas veces caerá tres?
   Registra los resultados de cada uno de los integrantes del grupo en una tabla como:

	Total de lanzamiento	Acierto de 3	Probabilidad experimental
Luisa	30	x	
Ricardo	30	...	

   a. ¿Qué resultado teórico esperabas?
   b. ¿Quién de tus compañeros(as) estuvo más cerca de este resultado?
   c. Si suman los lanzamientos de todo el grupo como si se tratara de un experimento, realizado más veces, ¿cuál es la probabilidad experimental de sacar 3 en un lanzamiento de dado?

6. En un torneo de basquetbol participan 10 equipos, de los cuales tres son de la zona del Pacífico, cinco de la zona del centro y dos de la zona del norte, determina lo siguiente:
   Cuál es la probabilidad de que gane el torneo un equipo

   a) Del centro
   b) Del norte
   c) Del Pacífico

   Cuál es la probabilidad de que no lo gane un equipo:

   a. Del centro
   b. Del norte
   c. Del Pacífico

7. Una persona va a comprar un automóvil y le comentan que con el dinero que con que cuenta puede adquirir un automóvil de cualquiera de las siguientes marcas: Chrysler, Chevrolet, Ford, BMW, Nissan.
   Cuál es la probabilidad de que adquiera:

   a. Un Ford
   b. Un Chrysler

   Cuál es la probabilidad de que no adquiera:

   c. Un Nissan
   d. Un Chevrolet

8. En una urna hay 10 boletas, 3 rojas, 4 blancas, 2 negras y 1 azul. De los siguientes sucesos, ¿cuál es el más probable y por qué?

   a. Sacar una boleta que sea blanca o azul.
   b. Sacar una boleta que sea roja o negra.
   c. Sacar una boleta que sea blanca o negra.

9. En una bolsa se tienen 3 canicas rojas, 2 amarillas y 4 blancas, determina lo siguiente (considera que el experimento es con reemplazo):

   a. La probabilidad de extraer una canica amarilla.
   b. La de sacar una canica blanca.
   c. La de elegir una canica roja.
   d. ¿Cómo son las probabilidades para cada color de canica?

10. En una urna hay 10 boletas: 3 son rojas, 4 blancas, 2 negras y 1 azul.
    De los siguientes sucesos, ¿Cuál es el más probable y por qué?

    a. Sacar una boleta que sea blanca o azul.

b. Sacar una boleta que sea roja o negra.
c. Sacar una boleta que sea blanca o negra.

11. En un almacén se tienen 7 televisores, de ellos 4 son a color y 3 en blanco y negro. Si una persona elige uno al azar, determina lo siguiente:

    a. La probabilidad de elegir un televisor a color.
    b. La de escoger uno en blanco y negro.
    c. Si ya eligieron tres televisores sin reemplazo (uno a color y 2 en blanco y negro), ¿cuál es la probabilidad de que se elija un televisor a color en el cuarto intento?

Entendemos por...
Incertidumbre el acto o evento carente de la cualidad de ser cierto o seguro.

Diversión matemática
Ayer por la tarde Juan fue a un concierto.
Guillermo pasó algún tiempo con Ana.
Jaime no vio a Carmen.
María estuvo en el cine.
Carmen estuvo en el teatro.
Un chico y una chica fueron juntos a un espectáculo.
Estaban también Marcos e Isabel.
¿Quién estuvo con quién y dónde?

. Valoración / cierre
Actividad individual. Se plantea actividades que le permite genera proceso de evaluación formativa de acuerdo a los aprendizajes esperados. Adicionalmente, puede comprobar el estado de los aprendizajes de acuerdo con el diseño de objetivos de la clase. 1. Socialización del taller realizado por cada uno de los integrantes. 2. Debate sobre lo expuesto por cada grupo. 3. Establecer procesos de auto evaluación de los objetivos de aprendizajes.

Evaluación

9. Descripción de la evaluación
1. Las debidas sustentaciones de los talleres resueltos en los diversos grupos, se establecen medidas de sustentación individual en donde cada estudiante argumenta de acuerdo a lo aprendido sus propias concepciones y soluciones de problemáticas establecidas. 2. Evaluaciones escritas que permitan medir los aprendizajes de cada estudiante con respecto a la fundamentación teórica y concreta de los conceptos impartidos. 3. Oportunidades de mejora para el fortalecimiento de los aprendizajes de aquellos estudiantes que no alcanzaron los objetivos esperados.

Observación / Realimentación
Espacios de reflexión entre estudiantes y docentes sobre la práctica, el proceso de enseñanza/aprendizaje y el impacto de la misma. Se identifica las estrategias, recurso, actividades o acciones pedagógicas que promovieron al logro del aprendizaje por parte de los estudiantes o aquellos que no fueron significativos en el desarrollo de la sesión. Son sugerencias para tener en cuenta en próximas sesiones de clases.